



TITLE:

# Laplace作用素のDissipativeな拡張について (位相解析的方法による偏微分方程式論の研究)

AUTHOR(S):

藤原, 大輔

---

CITATION:

藤原, 大輔. Laplace作用素のDissipativeな拡張について (位相解析的方法による偏微分方程式論の研究). 数理解析研究所講究録 1971, 121: 69-82

ISSUE DATE:

1971-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106483>

RIGHT:

# Laplace 作用素の Dissipativeな拡張について \*

東京大学, 教養 藤原大輔

## § 1 序

$\Omega$  を  $\mathbb{R}^{n+1}$  内の有界領域で, その境界を  $\Gamma$  とする.  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  が "境界のある  $C^\infty$  多様体" をなすと仮定する.  $\Omega$  上で定義された複素数値をとる関数  $u$  と実数  $s$  とに対して,  $s$  次ソボレフノルムを  $\|u\|_s$  と書く.

$\Omega$  内で Laplace 作用素  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2}$  を齊次境界条件:  $\mathcal{B}u|_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u}{\partial \nu} + (a + ib)u + (a_0 + ib_0)u|_\Gamma = 0$  の下で考える. ここで  $\nu$  は  $\Gamma$  への単位外法線,  $a, b$  は,  $C^\infty$  実ベクトル場 ( $\Gamma$  上),  $a_0, b_0$  は  $\Gamma$  上の  $C^\infty$  実関数である.

次の問題は難しい。

"適当に定数  $c$  を選ぶと, 評価:

$$(1.1) \quad -\operatorname{Re}(\Delta u, u) + c\|u\|_0^2 \geq 0$$

が, すべての  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  で  $\mathcal{B}u|_\Gamma = 0$  なる  $u$  に対して成立するような  $(\mathcal{B}, \Omega)$  という組をすべて定めよ."

---

\* この研究は, 内山康一氏との共同で行われた。

一つの良く知られた必要条件は、ベクトル  $b(x)$  の長さを  $|b(x)|$  と書くと、

$$(1.2) \quad |b(x)| \leq 1, \quad \forall x \in \Gamma$$

である。

一方、J. L. Lions [3] は、任意の  $x \in \Gamma$  に対して  $|b(x)| < 1$  であれば、評価 (1.3) が成立することを示した。

$$(1.3) \quad -\operatorname{Re}(\Delta u, u) + C_1 \|u\|_0^2 \geq C_0 \|u\|_1^2$$

$$C_1, C_0 > 0 \quad \text{const.}$$

ここでは、(1.2) を仮定して、評価

$$(1.4) \quad -\operatorname{Re}(\Delta u, u) + C_1 \|u\|_0^2 \geq C_0 \|u\|_{1/2}^2$$

$$C_1, C_0 > 0 \quad \text{const.}$$

が  $Bu|_\Gamma = 0$  をみたすすべての  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  に対して成立するための条件を求めたい。

我々は、一つの必要十分条件を得たが、 $n \geq 3$  のときはまだ十分 explicit とは云えない。ここでは  $n=2$  すなわち  $\Omega$  が  $\mathbb{R}^2$  の部分領域のとき、この必要十分条件を与えて、一般の  $n$  のときは、一つの十分条件、一つの必要条件を与える。いずれも  $\Omega$  の幾何学的形状にも言及することに注意されたい。

評価 (1.4) は局所化できることが分っている。(Fujiwara [2])。従って、Lions の結果を考慮すると、固難とは、

$|b(x_0)| = 1$  となる実  $x_0 \in \Gamma$  の近くで起ることが知られよう。  
 関数  $l(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - |b(x)|^2$ ,  $x \in \Gamma$  を導入する。仮定 (1.2) から,  $l(x) \geq 0$  で,  $x_0$  は  $l(x)$  の critical point である。 $x_0$  での  $l(x)$  の Hessian を  $L(x_0)$  とおく。 $\Gamma$  の接空間  $T_{x_0}(\Gamma)$  は内積  $\langle, \rangle$  によって, その dual と同一視され,  $L(x_0)$  は  $T_{x_0}(\Gamma)$  の線型変換と考えられる。 $\Gamma$  上の接ベクトル場  $a(x)$  を用いて  $\nabla_* a : T_{x_0}(\Gamma) \rightarrow T_{x_0}(\Gamma)$  なる線型変換を,  $T_{x_0}(\Gamma) \ni \xi \mapsto \nabla_\xi a \in T_{x_0}(\Gamma)$  によって定義する。超曲面  $\Gamma$  の  $\gamma$ -基本型式を  $T_{x_0}(\Gamma) \times T_{x_0}(\Gamma) \ni (\xi, \eta) \mapsto \omega_{x_0}(\xi, \eta) \in \mathbb{R}$  と書く。また,  $x_0 \in \Gamma$  における  $\Gamma$  の  $\gamma$ -平均曲率を  $M(x_0)$  とかく。(ここでは  $\Omega$  の内部の方向を+とした。)

定理 1      評価 (1.4) が成立すれば, 次の 2 条件が成立する。

- (i)       $\forall x \in \Gamma$  で,  $|b(x)| \leq 1$ .  
 (ii)       $|b(x_0)| = 1$  なるすべての実  $x_0 \in \Gamma$  で, 次の不等式が成立する。

$$\begin{aligned}
 (1.5) \quad & \sqrt{n-1} \left( \frac{1}{2} \operatorname{Tr} L(x_0) - \frac{1}{2} \langle L(x_0)b(x_0), b(x_0) \rangle - |\nabla_{b(x_0)} b|^2 \right. \\
 & \quad \left. + \operatorname{Tr} {}^t(\nabla_* b)(\nabla_* b) - \operatorname{Tr} (\nabla_* b)^2 \right)^{1/2} \\
 & \quad + \omega_{x_0}(b(x_0), b(x_0)) - n M(x_0) + 2a_0(x_0) - \operatorname{Tr} (\nabla_* a) > 0
 \end{aligned}$$

定理 2 次の条件 (a) (b) が成り立てば, 評価 (1.4) は成り立つ。

$$(a) \quad \forall x \in \Gamma \quad |b(x)| \leq 1$$

$$(b) \quad \left[ \frac{1}{2} \text{Tr} L(x_0) - \frac{1}{2} \langle L(x_0) b(x_0), b(x_0) \rangle - |\nabla b(x_0) b(x_0)|^2 + \right. \\ (1.6) \quad \left. + \text{Tr}^2(\nabla_* b)(\nabla_* b) - \text{Tr}(\nabla_* b)^2 \right]^{1/2} + \\ + \omega_{x_0}(b(x_0), b(x_0)) - n M(x_0) + 2 a_0(x_0) - \text{Tr}(\nabla_* a) > 0$$

なる不等式が,  $b(x_0) = 1$  となる各点  $x_0$  で成立すること。

系 3  $n=2$  ならば, 定理 1 の条件 (i) (ii) は, 評価 (1.4) が成立するための必要十分条件である。

### §2. グリーンの公式

$S$  を単位円周で, その上の generic な点を  $s$  とかく。  $\bar{\Omega} \times S$  での  $C^\infty$  関数  $u(x, s)$  に対して, その  $\Gamma \times S$  への制限  $\varphi(x, s)$  は  $C^\infty$  関数である。次の Dirichlet 問題はとける。

$$(2.1) \quad \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) w(x, s) = 0 \quad \text{in } \Omega \times S \\ w(x, s)|_{\Gamma} = \varphi(x, s).$$

$\varphi \mapsto w$  の対応を  $P$  とする。  $w = P\varphi$ .  $P$  は Poisson 作用素と呼ぶことにする。  $v = u - w$  とおくと, 分解

$$(2.2) \quad u = v + w$$

ができる。さらに,  $u$  が, 境界条件  $Bu|_{\Gamma} = 0$  を満たすとすると, Green の公式から

$$(2.3) \quad -\operatorname{Re} \iint_{\Omega \times S} (\Delta + \frac{\partial^2}{\partial s^2}) u \cdot \bar{u} \, dx \, ds \\ = -\operatorname{Re} \iint_{\Omega \times S} (\Delta + \frac{\partial^2}{\partial s^2}) v \cdot \bar{v} \, dx \, ds + \operatorname{Re} \iint_{\Gamma \times S} T \varphi(x, s) \overline{\varphi(x, s)} \, d\sigma \, ds$$

を得る。ここで  $d\sigma$  は  $\Gamma$  の hypersurface element である。  $T$  は  $\Gamma \times S$  上での一階の擬微分作用素で, 次のように定義される。

$$(2.4) \quad T \varphi = \frac{\partial P \varphi}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma \times S} + (a + ib) \varphi + (a_0 + ib_0) \varphi.$$

評価 (1.4) が成立することと, 次の評価 (2.5) が成立することとは同値であることが, 知られる。(Fujiwara [2])

$$(2.5) \quad \operatorname{Re} (T \varphi, \varphi) + C_1 \|\varphi\|_{-1/2}^2 \geq C_0 \|\varphi\|_0^2.$$

$C_1, C_0 > 0$  : const.

評価 (2.5) を考察するため, 作用素  $T$  のシンボルを求めよう。

### §3. Poisson 作用素

まず, Poisson operator  $P$  のシンボル (Boutet de Monvel [1]) を求める。  $x_0$  を  $\Gamma$  の任意の一点として固定する。  $x_0$  の近傍で, 次の座標系をとる。  $x_0$  を原点とし,  $y_1, \dots, y_n$  軸を  $\Gamma$  の接超平面上で,  $x_0$  での主曲率方向と一致させてとる。  $y_{n+1}$  軸は, 内法線方向とする。  $\Omega$  は, 不等式

$$(3.1) \quad y_{n+1} - \varphi(y') > 0$$

で与えられる.  $\varphi(y')$  は  $y' = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  の  $C^\infty$  関数で

$$(3.2) \quad \varphi(y') = \sum_j \omega_j y_j^2 + \sum_{j,k} \omega_{ijk} y_i y_j y_k + O(|y'|^4)$$

で与えられるとして良い.  $\omega_j, \omega_{ijk}$  は定数で,  $\omega_{ijk}$  は  $i, j, k$  に関し; 対称とする. 以下,  $i, j, k$  等についての和は, 1 から  $n$  迄独立にとるとする. Einstein の規約は, 使わない.

任意の実ベクトル  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  に対して, 双線型写像,  $\omega_{x_0}(\xi, \eta) = 2 \sum_j \omega_j \xi_j \eta_j$  が唯一基本型式で,  $\frac{2}{n} \sum_j \omega_j$  が唯一平均曲率  $M(x_0)$  であった.

変数変換をする.  $x = (x', x_{n+1})$ ,  $x' = (x_1, \dots, x_n)$  を

$$(3.3) \quad \begin{cases} y_i = x_i - \frac{x_{n+1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{\sqrt{1 + \sum_i (\frac{\partial \varphi}{\partial x_i})^2}}, & i=1, 2, \dots, n \\ y_{n+1} = \varphi(x') + \frac{x_{n+1}}{\sqrt{1 + \sum_i (\frac{\partial \varphi}{\partial x_i})^2}} \end{cases}$$

で与える. Jacobian は, 原点で 1 だから, 原点の近くで

$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  は座標となる. Taylor 展開してみると

$$\begin{aligned} x_i &= y_i + 2\omega_i y_i y_{n+1} + 4\omega_i^2 y_i y_{n+1}^2 - 2\omega_i y_i (\sum_j \omega_j y_j^2) \\ &\quad + 3 y_{n+1} \sum_{j,k} \omega_{ijk} y_j y_k + O(|y|^4) \\ x_{n+1} &= y_{n+1} - \sum_i \omega_i y_i^2 - 2(\sum_i \omega_i^2 y_i^2) y_{n+1} - \sum_{ijk} \omega_{ijk} y_i y_j y_k \\ &\quad + O(|y|^4). \end{aligned}$$

従って、空間の計量は、

$$(3.4) \quad ds^2 = (dy_1)^2 + \dots + (dy_{n+1})^2 \\ = \sum_i (dx_i)^2 + 4 \left( \sum_i \omega_i x_i dx_i \right)^2 + (dx_{n+1})^2 + O(|x|^3).$$

新しい座標系で、 $-(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial s^2})$  の主シンボルと  $\sigma^2$  シンボルは、

$$(3.5) \quad \sum_j (1 + 4\omega_j x_{n+1} + 12\omega_j^2 x_{n+1}^2 + O(|x|^3)) \xi_j^2 + \xi_{n+1}^2 + \sigma^2 \\ + \sum_{i,j} \left\{ 12x_{n+1} \left( \sum_k \omega_{ijk} x_k \right) - 4\omega_i \omega_j x_i x_j + O(|x|^3) \right\} \xi_i \xi_j \\ - 2i \sum_j \left\{ -2 \left( \sum_i \omega_i \omega_j x_j \right) + 3x_{n+1} \left( \sum_i \omega_{ij} \right) + O(|x|) \right\} \xi_j \\ + 2i \left( \sum_j \omega_j + 2x_{n+1} \sum_j \omega_j^2 + 3 \sum_{ij} \omega_{ij} x_j + O(|x|) \right) \xi_{n+1}.$$

$-(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial s^2})$  の主シンボルを  $A_2(x, \xi', \xi_{n+1}, \sigma)$  とする。これを  $\xi_{n+1}$  の2次多項式とみて、Imaginary 部分  $\geq 0$  の根を  $\tau^\pm$  とする。 $\tau^\pm$  の Taylor 展開は、

$$(3.6) \quad \tau^\pm = \pm i \left( \rho_1 - 2\rho_1^{-1} \sum_{ij} \omega_i \omega_j x_i x_j \xi_i \xi_j + O(|x|^3) \right) \\ \text{ここで, } \rho_1 = (|\xi'|^2 + \sigma^2)^{1/2}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

さて、 $-\Delta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}$  の基本解を  $\varphi$  とし、そのシンボルの漸近展開を

$$f(x, \xi, \sigma) \sim f_{-2}(x, \xi, \sigma) + f_{-3}(x, \xi, \sigma) + \dots$$

とすると、主シンボル  $f_{-2}(x, \xi, \sigma)$  は、

$$f_{-2}(x, \xi, \sigma) = \rho^{-2} - 4\rho^{-4} x_{n+1} \left( \sum_j \omega_j \xi_j^2 \right) \\ + 16\rho^{-6} x_{n+1}^2 \left( \sum_j \omega_j \xi_j^2 \right)^2 - 12\rho^{-4} x_{n+1} \left( \sum_j \omega_j^2 \xi_j^2 \right) \\ - \rho^{-4} \sum_{ij} \left\{ 12x_{n+1} \left( \sum_k \omega_{ijk} x_k \right) - 4\omega_i \omega_j x_i x_j \right\} \xi_i \xi_j \\ + O(|x|^3) \rho^{-2}$$



ここで  $\rho = \sqrt{|\xi|^2 + \sigma^2}$ .  $\neq 2$  シンボルは

$$(3.8) \quad f_{-3}(x, \xi, \sigma) = -2i \xi_{n+1} (4\rho^{-6} \sum_j \omega_j \xi_j^2 + \rho^{-4} \sum \omega_j) \\ + O(|x|) \rho^{-3}$$

$T^+$  を主シンボルとする一位の擬微分作用素を  $T^+$  とおく.

作用素  $Q: C_0^\infty(\Gamma \times S) \longrightarrow Q\varphi \in C^\infty(\sqrt{S})$  を

$$(3.9) \quad Q\varphi = \mathcal{F}\left(i \frac{\partial \delta(\Gamma \times S)}{\partial \nu} \otimes \varphi - \delta(\Gamma \times S) \otimes T^+ \varphi\right)$$

で定義する. ここで  $\delta(\Gamma \times S) \otimes \varphi$  は次のような超関数.

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1} \times S) \ni \phi \longmapsto \int_{\Gamma \times S} \phi|_{\Gamma \times S} \cdot \varphi \, d\Gamma \, ds.$$

作用素  $Q$  は, Boutet de Monvel の意味で, 擬 Poisson 作用素で, そのシンボルは, 次のようにして得られる.

$$(3.9) \quad (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f_{-2}(x', 0, \xi', \xi_{n+1}, \sigma) (\xi_{n+1} - \tau^-) \right. \\ + x_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} f_{-2}(x', 0, \xi', \xi_{n+1}, \sigma) (\xi_{n+1} - \tau^-) \\ - \sum_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} f_{-2}(x', 0, \xi', \xi_{n+1}, \sigma) (-i \frac{\partial}{\partial x_j} \tau^-) \\ + f_{-3}(x', 0, \xi', \xi_{n+1}, \sigma) (\xi_{n+1} - \tau^-) \Big\} e^{i(x_{n+1} \xi_{n+1})} d\xi_{n+1} \\ + O((x_{n+1} \rho_1^{-1})^2) \\ = i e^{-x_{n+1} (\rho_1 - 2\rho_1^{-1} \sum_j \omega_j \omega_j x_i x_j \xi_i \xi_j + O(|x'|^2))} \\ - i x_{n+1} \left( \sum_j \omega_j \xi_j^2 + 3 \sum_{j,k} \omega_{j,k} x_k \xi_i \xi_j + O(|x'|^2) \right) x \\ \times (2x_{n+1} \rho_1^{-1} + \rho_1^{-2}) e^{-x_{n+1} \rho_1} \\ + \left( \sum_{j,k}^n \omega_j \omega_k \xi_k x_k \xi_j^2 \rho_1^{-1} \right) (2x_{n+1} \rho_1^{-2} + 2\rho_1^{-3} + O(|x'|)) e^{-x_{n+1} \rho_1} \\ + i (\sum \omega_j \xi_j^2) (x_{n+1}^2 \rho_1^{-1} - (2\rho_1^3)^{-1}) + i (\sum \omega_i) x \\ \times (x_{n+1} - (2\rho_1)^{-1}) e^{-\rho_1 x_{n+1}}$$

ここで  $\rho_1 = (|\xi'|^2 + \rho^2)^{1/2}$ .

これから,  $\mathcal{K}: \varphi \longmapsto Q\varphi|_{P \times S}$  という写像は, 一階の楕円型擬微分作用素であることが分る。そのシンボルは,

$$-i \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \sum_j \omega_j \xi_j^2 \right) \rho_1^{-3} - \frac{1}{2} \left( \sum_j \omega_j \right) \rho_1^{-1} + \dots \right).$$

$\mathcal{K}^{(-1)}$  をそのパラメトリックスとする。作用素

$$Q\mathcal{K}^{(-1)}\varphi = \mathcal{F} \left( i \frac{\partial \delta(P \times S)}{\partial \nu} \otimes \mathcal{K}^{(-1)}\varphi - \delta(P \times S) \otimes T\mathcal{K}^{(-1)}\varphi \right)$$

は Poisson 作用素  $P$  と同じシンボルをもつ。 $P$  のシンボルは, したがって,

$$\begin{aligned} (3.11) \quad & e^{-x_{n+1} \left( \rho_1 - 2\rho_1^{-1} \left( \sum_j \omega_j x_j \xi_j \right)^2 + O(|x'|^2) \right)} \\ & - x_{n+1} \left( \left( \sum_j \omega_j \xi_j^2 \right) \rho_1^{-2} + O(|x'|) \right) e^{-x_{n+1} \rho_1} \\ & + x_{n+1} \left( \sum_j \omega_j + O(|x'|) \right) e^{-x_{n+1} \rho_1} \\ & + O(x_{n+1} \rho_1^{-1})^2 \end{aligned}$$

よって,  $\varphi \longmapsto \frac{\partial}{\partial \nu} P\varphi|_{P \times S}$  は擬微分作用素で, その主シンボルは,

$$(3.12) \quad \rho_1 - 2\rho_1^{-1} \left( \sum_j \omega_j x_j \xi_j \right)^2 + O(|x'|^2)$$

その第2シンボルは,

$$(3.13) \quad \left( \sum_j \omega_j \xi_j^2 \right) \rho_1^{-2} - \sum_j \omega_j + O(|x'|).$$

次に  $\Gamma$  でのベクトル場,  $a(x)$ ,  $b(x)$  の Taylor 展開を,

$$(3.14) \quad a(x) = \sum_j (\alpha_j + \sum_k \alpha_{jk} x_k + O(|x'|^2)) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$(3.15) \quad b(x) = \sum_j (\beta_j + \sum_k \beta_{jk} x_k + \sum_{j,k,\ell} \beta_{jke} x_k x_\ell + O(|x'|^3)) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

とする。作用素  $\text{Re } T$  のシンボルを書き下すことができる。

$\text{Re } T$  の主シンボル  $t_1(x, s, \xi, \sigma)$  は,

$$(3.16) \quad t_1(x, s, \xi, \sigma) = p_1 - 2p_1^{-1} \left( \sum_j \omega_j x_j \xi_j \right)^2 - \sum_j (\beta_j + \sum_k \beta_{jk} x_k + \sum_{k \neq l} \beta_{jkl} x_k x_l) \xi_j + O(|x|^3) p_1$$

第 2 シンボル  $t_0(x, s, \xi, \sigma)$  は,

$$(3.17) \quad t_0(x, s, \xi, \sigma) = \sum_j \omega_j \xi_j^2 p_1^{-2} - \left( \sum_j \omega_j \right) + a_0(x_0) - \frac{1}{2} \sum_j d_{jj} + O(|x|).$$

#### §4 定理の証明

$x_0 \in \Gamma$  で  $|b(x_0)|^2 = 1$  とする。上の座標系のとり方で

$$(4.1) \quad \sum_j \beta_j^2 = 1.$$

一方  $l(x) \geq 0$  だから (3.4) を使って,

$$(4.2) \quad \sum_j \beta_j \beta_{jk} = 0$$

であって,  $l(x)$  の  $x_0$  での Hessian  $L(x_0)$  は non negative 対称行列で, 次のように与えられる。

$$(4.3) \quad \frac{1}{2} \langle \xi, L(x_0) \xi \rangle = -4 \left( \sum_j \omega_j \xi_j \beta_j \right)^2 - \sum_j \left( \sum_k \beta_{jk} \xi_k \right)^2 - 2 \sum_{j \neq k} \beta_j \beta_{jkl} \xi_k \xi_l.$$

ただし,  $\langle, \rangle$  は接ベクトル空間  $T_{x_0}(\Gamma)$  の自然な内積。

$$\text{一方 } |\nabla_\xi b|^2 = \sum_j \left( \sum_k \beta_{jk} \xi_k \right)^2, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in T_{x_0}(\Gamma),$$

だから,

$$(4.4) \quad \frac{1}{2} \langle \xi, L(x_0) \xi \rangle + |\nabla_\xi b|^2 = -4 \left( \sum_j \omega_j \xi_j \beta_j \right)^2 - 2 \sum_{j \neq k} \beta_j \beta_{jkl} \xi_k \xi_l.$$

以上を準備として定理を証明して行こう。

$\text{Re}T$  の主シズギルは cotangent bundle 上の点  $(x_0, b(x_0))$  で 0 となった。(即ち,  $\varepsilon=0$ ,  $\xi=\beta$ ,  $\sigma=0$ ) ここで Hessian を  $H(x_0)$  とする.

$X$  で縦ベクトル  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \eta_1, \dots, \eta_n, A, \sigma)$  ( $2n+2$ 次元) をあらわし,  $\langle X, Y \rangle$  で  $X$  と  $Y = (y_1, \dots, y_n, \xi_1, \dots, \xi_n, A', \sigma')$  の内積  $\sum x_j y_j + \sum \xi_j \eta_j + AA' + \sigma\sigma'$  をあらわすと,

$$(4.5) \quad \frac{1}{2} \langle HX, X \rangle = \frac{1}{2} \left( \sum_j \eta_j^2 + \sigma^2 \right) - \frac{1}{2} \left( \sum_j \beta_j \eta_j \right)^2 - \sum_{p,k} \beta_{pk} x_k \eta_p \\ - 2 \left( \sum_j \omega_j \beta_j x_j \right)^2 - \sum_{j,k,l} \beta_j \beta_{jkl} x_k x_l.$$

$n \times n$  matrices を導入しよう.

$$A = \begin{pmatrix} \omega_1^2 \beta_1^2, & \omega_1 \omega_2 \beta_1 \beta_2, & \dots, & \omega_1 \omega_n \beta_1 \beta_n \\ \omega_2 \omega_1 \beta_1 \beta_2, & & & \\ \vdots & & & \\ \omega_n \omega_1 \beta_1 \beta_n, & \dots, & \dots, & \omega_n^2 \beta_n^2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \sum_j \beta_j \beta_{j11}, & \sum_j \beta_j \beta_{j12}, & \dots, & \sum_j \beta_j \beta_{j1n} \\ \sum_j \beta_j \beta_{j21} & & & \\ \vdots & & & \\ \sum_j \beta_j \beta_{jn1} & \dots, & \dots, & \sum_j \beta_j \beta_{jnn} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \beta_1^2 & \dots & \beta_1 \beta_n \\ \vdots & & \\ \beta_n \beta_1 & \dots & \beta_n^2 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

そうすると,  $H(x_0)$  は

$$H = H(x_0) = \begin{pmatrix} -4A - 2B, & -{}^t C & 0 & 0 \\ -C & I - D, & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

つぎに,  $2n+2$  次の複素構造

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ただし } J_0 = \left( \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}}^{2n} \right) \Bigg\}^{2n}$$

を導入する.  $JH$  の固有値は純虚数ばかりで, 実軸に関して対称に分布する.  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  は Nilpotent である.

よって  $iJH$  の正固有値は,  $iJ_0 H_0$  の正固有値と一致する.

$H_0$  は  $H_0 = \begin{pmatrix} -4A - 2B & -{}^t C \\ -C & I - D \end{pmatrix}$ . 一方,  $\text{Re } T$  の主シンボルの次数だから,  $\text{rank } H_0$  は高々  $2n-1$ . これから  $iJ_0 H_0$  の正固有値の数は  $n-1$  を越えないことが分る.  $\mu_1(x_0), \dots, \mu_{n-1}(x_0)$  を  $iJ_0 H_0$  の負でない固有値とする. Anders Melin の得た定理を作用素  $\text{Re } T$  に用いて, 評価 (2.5) を経て,

#### 定理 4.

任意の  $C^2(\bar{\Omega})$  関数で  $Bu|_P = 0$  なるものに対して, 評価 (1.4) が成立する必要十分条件は,

(1)  $\forall x \in \Gamma$  に対して  $|b(x)| \leq 1$

(2)  $|b(x_0)| = 1$  になる任意の  $x_0 \in \Gamma$  に対して, 不等式

$$\frac{1}{2} (\mu_1(x_0) + \dots + \mu_{n-1}(x_0)) + \operatorname{Re} t_0 > 0$$

が成立することである. ここで  $\operatorname{Re} t_0$  は

$$\operatorname{Re} t_0 = \frac{1}{2} \omega_{x_0}(b(x_0), b(x_0)) - \frac{n}{2} M(x_0) + a_0(x_0) - \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \nabla_* a$$

とかける.

$\mu_1(x_0) + \dots + \mu_{n-1}(x_0)$  は今のところ explicit に書きあらわせないで, 次の評価でこれをおまかえる.

$$(\mu_1^2 + \dots + \mu_{n-1}^2)^{1/2} \leq \mu_1 + \dots + \mu_{n-1} \leq \sqrt{n-1} (\mu_1^2 + \dots + \mu_{n-1}^2)^{1/2}.$$

即ち,

$$(4.6) \quad \left[ -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} (J_0 H_0)^2 \right]^{1/2} \leq \mu_1(x_0) + \dots + \mu_{n-1}(x_0) \leq \sqrt{n-1} \left[ -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} (J_0 H_0)^2 \right]^{1/2}.$$

前に出て来た座標系を使ってやれば,

$$\operatorname{Tr} (J_0 H_0)^2 = 2 (\operatorname{Tr} C^2 - \operatorname{Tr} (I-D)(-4A-2B))$$

から

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} (J_0 H_0)^2 = 2 & \left( \sum_{p,k} \beta_{pk} \beta_{kp} + 4 \sum_j \omega_j^2 \beta_j^2 + 2 \sum_{ij} \beta_i \beta_{ij} \right) \\ & - 4 \sum_{j,k} \omega_j \omega_k \beta_j^2 \beta_k^2 - 2 \sum_{ijk} \beta_i \beta_k \beta_j \beta_{ijk} \end{aligned}$$

これに, (4.4) を使って, 座標系によらぬ表現として,

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} (J_0 H_0)^2 = 2 & \left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} L(x_0) - \operatorname{Tr} {}^t(\nabla_* b)(\nabla_* b) + \operatorname{Tr} (\nabla_* b)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \langle b(x_0), L(x_0) b(x_0) \rangle + |\nabla_{b(x_0)} b|^2 \right\}. \end{aligned}$$

これと (4.6) を定理 4 に用いて, 定理 1, 定理 2 を得る.

系3は,  $\eta=2$  のとき

$$\left(-\frac{1}{2} \operatorname{Tr} (J_0 H_0)^2\right)^{1/2} = \mu_1(x_0)$$

による。

### § 5. 注 意

(イ)  $a \equiv 0$  であって,  $b$  の interior differentiation と  $a_0 + ib_0$  が適当な関係にあれば,  $Bu|_P = 0$  なる境界条件で考えた  $\Delta$  は形式的 self-adjoint 作用素となるが, もしこれが, 定理2, 3 あるいは4の条件をみたせば, Friedrichs 拡張が存在することが証明されたことになる。

(ロ) 以上の理論を高階の作用素に行うことは試みていない。

### 文 献

- [1] Boutet de Monvel, Pseudo-noyaux de Poisson.  
C. R. Acad. Sc. Paris, 1966
- [2] Fujiwara, D. On some homogeneous boundary value problems bounded below. J. Fac. Sc. Univ. Tokyo. 17. 1970. 123-152.
- [3] Lions, J. L. Sur les problemes aux limites du type derivees obliques. Ann. of Math. 64 (1959) 207-239
- [4] Melin, A. Lower bound for pseudo-differential operators. Pre-print. Inst. Mittag-Leffler.